

A Fazekas Matektábor legérdekesebb feladatai

Dunabogdány, 2025. szept. 29. – okt. 3.

Szerkesztette: Hujter Bálint

A speciális matematika tagozat hagyományos őszi matektáborát a 2025-26-os tanévben szeptember 29. és október 3. között rendeztük, a korábbi években már jól bevált helyszínen, a dunabogdányi JEKA üdülőben.



A táborban 28 diák vett részt, akik az alábbi csapatokba rendeződve dolgoztak:

- 257,7 kg
(Czirják Márton Pál 12c, Szabó Sámuel 11c, Szakács Ábel 12c, Virág Tóbiás 11c).
- Gábor néni
(Chen JiaTong, Pálfi András, Prohászka Bulcsú, Ta Minh Khoa 12c)
- Gigamegapingvin
(Dulácska Dániel 12c, Sohár Bernadett 12c, Szabó-Komoróczy Csenge Veronika 11c, Tajta Sára 12c)
- Gyakorlati valószínűségszámítás
(Holló Martin 12c, Kis Ágoston 11c, Kocsis Péter 12c, Sha Jingyuan 11b)
- Olav-család
(Bui Nikolett, Csató Hanna Zita, Horák Zsófia, Kis Lícia 11c)
- Quadrumviratus
(Lakner Hanna Rozália, Sárdinecz Dóra, Veres Dorottya, Zhai You Fan 12c)
- Reménytelen
(Juhász-Molnár Mirkó, Máté Marcell, Sánta Gergely, Vödrös Dániel 11c)

A tábori munkát Hujter Bálint és Lenger Dániel matematikatanárok vezették, és segítségükre volt Németh Márton öregdiákunk is (2023c, a Cambridge-i Egyetem harmadéves matematikus hallgatója). Szerdán vendégünk volt Simon László (2024c, a Cambridge-i Egyetem másodéves

matematikus hallgatója) – aki délután érdekes előadást tartott algebrai geometriai feladatokról – és Móricz Benjámín (2023c, az ELTE harmadéves matematikus hallgatója). Laci és Beni este a már tábori hagyománynak is nevezhető vetélkedőt vezetett a táborlakóknak, „Zrínyi bajnokság” címmel.

A következőkben egy összeállítás olvasható a tábor legérdekesebb feladataiból és megoldásaikból. A feladatoknál jeleztük, hogy melyik diák hozta a táborba, illetve ki írta le az itt szereplő megoldás(ok)at.

Tartalomjegyzék

1. Konstrukciók racionális és irracionális számokról	3
2. Algebrának látszik	7
3. Nem tűnik algebrának	9
4. Komplex soxögek	11
5. Számelméleti vegyesfelvágott	13
6. Geometriai finomfőzelék	16
7. Kombinatorikus desszertek	20

1. Konstrukciók racionális és irracionális számokról

A táborban három emlékezetes feladat is volt, ahol a racionális számok halmazára kellett valami érdekes dolgot konstruálni. Ráadásul, különösen szerencsés módon, éppen abban a sorrendben kerültek kitűzésre, ahogy ebben a fájlban is következnek.

1. feladat (KöMaL B.4803., Sárdinecz Dóra)

Meg lehet-e adni a számegyenesen racionális végpontú zárt intervallumokat úgy, hogy minden racionális szám pontosan egy intervallum végpontja legyen, továbbá

- a) bármelyik két zárt intervallum közül az egyik tartalmazza a másikat;
- b) semelyik két intervallum nem diszjunkt és egyik sem tartalmazza a másikat?

Ne használjunk 0 hosszúságú intervallumokat.

Hujter Bálint megoldása. a) Ha bármely két intervallum közül az egyik tartalmazza a másikat, akkor ezek egymásba skatulyázott zárt intervallumok, tehát a Cantor-axióma szerint van közös részük: egy szám vagy egy intervallum. A közös rész nem tartalmazhat racionális számot (mivel az nem lenne egy megadott intervallumnak sem a vége), azaz csak egyetlen irracionális szám lehet.

Ez adja az ötletet az alábbi konstrukcióhoz. Olyan egymásba skatulyázott $[a_i, b_i]$ intervallumokból álló $\mathcal{I}$ rendszert építünk, melynek egyetlen közös pontja a $\sqrt{2}$, és minden racionális szám pontosan egy intervallum végpontja.

Legyen a egy tetszőleges, $\sqrt{2}$ -nél kisebb racionális szám, ekkor kell lennie egy $[a, b]$ intervallumnak $\mathcal{I}$ -ben. Ha $1 \leq a < \sqrt{2}$, akkor legyen $b = 2/a$ (azaz ilyenkor a és b mértani közepe $\sqrt{2}$). Ha pedig $a < 1$, akkor legyen $b = 3 - a$. Könnyen ellenőrizhető, hogy így minden $\sqrt{2}$ -nél nagyobb racionális szám egyetlen $\mathcal{I}$ -beli intervallum végpontja lesz.

b) Legyen $\mathcal{J} = \{[a_i, b_i] : i \in \mathbb{Z}^+\}$ egy olyan intervallum-rendszer, amely teljesíti a feltételeket (mivel $\mathbb{Q}$ megszámlálható, indexelhetjük az intervallumokat a pozitív egészekkel). Legyen $A = \sup\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ és $B = \inf\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$. Könnyen meggondolható, -hogy $A = B$, hiszen $A < B$ esetén az (A, B) -beli racionális számok nem lehetnének semmilyen intervallumnak végpontjai, míg $A > B$ esetén lennének diszjunkt intervallumok (hiszen kellene legyen $\frac{A+B}{2}$ előtt végződő és $\frac{A+B}{2}$ után kezdődő intervallum is). Meggondolható az is, hogy az sem lehet, hogy ez a közös $A = B$ érték racionális, mert akkor az itt kezdődő vagy végződő intervallumot tartalmazná valamelyik másik.

Úgy van tehát csak esélyünk konstrukcióra, ha $A = B$ egy irracionális szám, például $\sqrt{2}$. Vizsgáljuk az $f : a_i \mapsto b_i$ hozzárendelést. f minden $\sqrt{2}$ -nél kisebb racionális számhoz egy $\sqrt{2}$ -nél nagyobb racionális számot rendel, még hozzá szigorúan monoton növekvő módon – épp ezt diktálja a „semelyik két intervallum nem diszjunkt és egyik sem tartalmazza a másikat” feltétel. (Utólag érdemes visszatekinteni az a) feladatrészt – valószínűleg ott is egy hasonló hozzárendelést adtunk meg, csak ott szigorúan monoton csökkenőt).

Ilyen függvényt lehet konstruálni. A táborban Vödrös Dániel mutatott egy szép módszert, amit most nem közlünk. Ehelyütt inkább Németh Márton (tábori egyetemista segítőnk) gondolatmenetét elevenítjük fel.

Rendezzük valahogy sorozatba a racionális számokat: $q_1, q_2, \dots$ (megtehetjük, hiszen megszámlálhatóan sokan vannak). Ezután a következő lépést ismételgetjük. Vesszük a legkisebb indexű q_i -t, amely még nem végpontja intervallumnak. Ennek kell találnunk párt a $\sqrt{2}$ másik

oldalán, azaz annak az intervallumnak a másik végpontját, amelynek q_i az egyik végpontja. Ha $q_i < \sqrt{2}$, akkor itt kezdőpont lesz, és egy $q_j > \sqrt{2}$ számban fog végződni az intervallum. Tekintsük a (véges sok) már kiválasztott intervallumot. A q_i -nál kisebb számban kezdődő közül intervallumok a legnagyobb végpont legyen s_i , a q_i -nál nagyobb számban kezdődő intervallumok közül a legkisebb végpont a legkisebb végpont legyen t_i . Ha $s_i < q_j < t_i$, akkor a $[q_i, q_j]$ intervallum nem fog problémát okozni a „semelyik két intervallum nem diszjunkt és egyik sem tartalmazza a másikat”. Márpedig fogok tudni ilyen q_j szabad (tehát még nem intervallum-végpont) számot találni, hiszen az (s_i, t_i) intervallumban végtelen sok racionális szám van, melyek közül még csak véges sok lehetett eddigre kiválasztva intervallum-végpontnak. (Hasonlóan eljárhatunk akkor is, ha $q_i > \sqrt{2}$, ilyenkor kezdőpontot keresünk a q_i -ben végződő intervallumnak). (A [KöMaL honlapján](#) lényegében ez a gondolatmenet olvasható, részletesebben kifejtve.) $\square$

Az előbb ismertetett módszert nevezzük el a „Rekurzív kívánságok módszerének”, a következő két feladatban még visszatérünk erre. (Világos, hogy az a) rész is megoldható lett volna így.)

2. feladat (?, Vödrös Dániel)

Igaz-e, hogy ha az $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvények szigorúan monoton nőnek és értékkészletük a teljes $\mathbb{Q}$, akkor az $f + g$ függvény értékkészlete is a teljes $\mathbb{Q}$?

Hujter Bálint megoldása. Vannak olyan szigorúan monoton növekvő $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvények, melyek értékkészlete a teljes $\mathbb{Q}$, de az $f + g$ függvény értékkészlete nem a teljes $\mathbb{Q}$.

Elegendő készítenünk egy olyan $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvényt, amely monoton növekvő, az értékkészlete a teljes $\mathbb{Q}$, és még a következő feltételt teljesíti:

$$x < \sqrt{2} \iff f(x) < 6 - \sqrt{2}$$

(Ekkor persze $x > \sqrt{2} \iff f(x) > 6 - \sqrt{2}$ is teljesül). Egy ilyen f függvény mellé véve a $g(x) = x$ (minden $x \in \mathbb{Q}$ esetén) függvényt, az $f + g$ semmilyen racionális helyen nem fogja felvenni az 1 értéket. Hiszen a szigorú monotonitás miatt,

- ha $x < \sqrt{2}$, akkor $f(x) + g(x) < \sqrt{2} + (6 - \sqrt{2}) = 6$,
- ha $x > \sqrt{2}$, akkor $f(x) + g(x) > \sqrt{2} + (6 - \sqrt{2}) = 6$.

Tehát $f + g$ sehol nem veszi fel a 6 értéket. Ilyet pedig nem is olyan nehéz konstruálni, például az előző feladatban megismert rekurzív kívánságok módszerével. Soroljuk fel $\mathbb{Q}$ elemeit a $q_1, q_2, \dots$, és rekurzívan határozzuk meg minden n -re.

- előbb $f(q_n)$ értékét,
- majd azon a_n számot, amelyre $f(a_n) = q_n$.

Az $f(q_n)$ értékének meghatározásakor már ismertek az $A_{n-1} = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, q_1, q_2, \dots, q_n\}$ halmazba eső helyeken vett $B_{n-1} = \{q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, f(q_1), f(q_2), \dots, f(q_n)\}$ értékek úgy, hogy a szigorú monotonitás nem sérül.

Lehet, hogy valamelyik $n > i$ -re $a_i = q_n$, ekkor $f(q_n)$ már adott. Egyébként az $s = \max\{x \in A_n, x < q_n\}$ és $t = \min\{x \in A_n, x > q_n\}$ helyek kijelölnek

egy $(f(s), f(t))$ intervallumot, amelyből szabadon választhatunk egy racionális számot $f(q_n)$ értéknek.

Hasonlóan, ha valamelyik $n > i$ -re $f(q_i) = q_n$, akkor ezzel a_n már adott.

Egyébként pedig az $u = \max\{x \in A_n, f(x) < q_n\}$ és $v = \min\{x \in A_n, f(x) > q_n\}$ értékek jelölnek ki egy (u, v) intervallumot, ahonnan szabadon választhatunk egy racionális számot a_n -nek.

Így minden racionális számon értelmezve lesz a függvény, minden racionális értéket fel is vesz, és a szigorú monotonitás sem sérülhet. $\square$

Második megoldás. A rekurzív kívánságos módszer nem igazán konstruktív, nehéz például arra válaszolni, hogy mennyi $f(1)$? Mutatunk egy konstruktívabb módszert is f készítésére.

Legyen a_n és b_n egy-egy racionális számokból álló, szigorúan monoton növekvő sorozat, amelyekre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6 - \sqrt{2}$. (Például lehet a_n az a szám, amelyet $\sqrt{2}$ tizedestört alakjának az n . tizedesjegynél való csonkításával kapunk, pl. $a_4 = 1,4142$; hasonlóan kaphatunk egy jó b_n sorozatot a $6 - \sqrt{2}$ tizedestört alakjából). f pedig legyen az a függvény, amelynek a grafikonja az (a_n, b_n) és (a_{n+1}, b_{n+1}) pontokat összekötő egyenes szakaszokból áll, a_1 -től balra pedig egy tetszőleges pozitív meredekségű félegyenes. A $\sqrt{2}$ -nél nagyobb helyeken lényegében ugyanígy, egy monoton csökkenő sorozatpár segítségével határozzuk meg f értékeit. (Könnyen meggondolható, hogy így minden racionális számhoz racionális számot rendelünk, és minden racionális számot fel is vesz értékként a függvényünk.) $\square$

3. feladat (Kvant, Szakács Ábel)

Lehetséges-e a síkon minden racionális pontból indítani egy félegyenest úgy, hogy semelyik kettő nem párhuzamos és nem metszi egymást?

Prohászka Bulcsú megoldása. A válasz igen. Ehhez először szükségünk lesz egy olyan P pontra, amelyről tudjuk hogy nincs rajta semmilyen olyan egyenesen, amely két racionális pontot köt össze. Kétféleképp is megmutatjuk, hogy van ilyen:

1. módszer P keresésére. Gondoljuk meg hogy ilyen (racionális pontokat összekötő) egyenesből megszámlálható sok van. Ehhez legyen $f_{(a,b,c,d,e,f,g,h)}$ az az egyenes, ami az $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ és $(\frac{e}{f}, \frac{g}{h})$ pontokat összeköti. (Persze vegyük ezen törtek legegyszerűbb alakját.) Ezeket az egyeneseket pedig fel lehet sorolni. Legyen ugyanis i függvény $i(f_{(a,b,c,d,e,f,g,h)}) = |a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f| + |g| + |h|$. Először soroljuk fel azokat az f egyeneseket amikre $i(f) = 1$. Ebből láthatóan véges sok van. Aztán így tovább sorban felsoroljuk azokat, amikre $i(f) = 2$, és így tovább. Ha egy egyenest esetleg már felsoroltunk (pl már felsoroltuk a $(0, 0)$ -át és a $(1, 0)$ -át összekötő egyenest és most a $(0, 0)$ -át és a $(0, 2)$ -t összekötő egyenest akarjuk felsorolni), akkor azt kihagyhatjuk. Látható, hogy felsoroltuk az összes ilyen egyenest, tehát megszámlálható sok van belőlük.

Ezek között az egyenesek között nincs ott az $y = \sqrt{3}$ egyenes, hiszen ezen egy racionális pont sincs; továbbá ezek az egyenesek (legfeljebb) megszámlálható sok pontban metszik el az $y = \sqrt{3}$ egyenest. De ezen az egyenesen kontinuum sok pont van, vagyis lesz olyan pont rajta ami egy olyan egyenesen sincs rajta mely két rac pontot kötne össze. Legyen az egyik ilyen pont P .

2. módszer P keresésére. Meg lehet mutatni, hogy a $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ pont megfelelő P lesz. Könnyen belátható, hogy bármely, legalább két racionális ponton átmenő egyenes egyenlete felírható $ax + by = c$ alakban, ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$, és a és b közül valamelyik nem 0.

Tegyük fel hogy P rajta van egy ilyen egyenesen vagyis vannak megfelelő a, b, c számok, amelyekre $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c$. Először is gondoljuk meg hogy c nem lehet 0, hisz ekkor

$$a\sqrt{2} = -b\sqrt{3} \implies 2a^2 = 3b^2,$$

teljesülne, ami ellentmondás mert a baloldalon páratlan sok kettes prímtényező van a jobboldalon viszont páros. Továbbá az sem lehet, hogy $b = 0$, mert ekkor $a \neq 0$ és $\sqrt{2} = \frac{c}{a}$, de ez nem lehet mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Most rendezgessük kicsit:

$$\begin{aligned} a\sqrt{2} &= c - b\sqrt{3} \\ 2a^2 &= c^2 + 3b^2 - 2bc\sqrt{3} \\ \sqrt{3} &= \frac{c^2 + 3b^2 - 2a^2}{2bc} \end{aligned}$$

(felhasználtuk, hogy $bc \neq 0$). Ez viszont megint ellentmondás, hisz $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Konstrukció a megtalált P segítségével. Minden Q racionális pontból azt a félegyenest indítjuk ami a PQ egyenesen van, de nincs rajta P .

Ezek a félegyenések láthatóan nem párhuzamosak, és nem metszik egymást, hiszen ha a teljes egyeneseket nézzük azok a P pontban metszenék egymást (csak). De szerencsére a P pont a félegyeneseken nincs rajta. Kész vagyunk.

Végül álljon itt egy kép a hiperúgrást végrehajtó Ezeréves Súlyomról:



□

2. Algebrának látszik

Három algebrai jellegű, a táborban a könnyebbek közé tartozó kérdés következik. De több is van köztük, amelynél a megoldás nem is feltétlenül (csak) algebrai lehet.

4. feladat (?, Virág Tóbiás)

Legyenek $x, y, z > 0$ úgy, hogy $xyz(x + y + z) = 1$.

Határozzuk meg az $(x + y)(x + z)$ kifejezés minimális értékét.

1. megoldás, lejegyezte: Tajta Sára. Mivel $xyz(x + y + z) = 1$, ezért $x + y + z = \frac{1}{xyz}$.

Így

$$(x + y)(x + z) = x^2 + xz + xy + yz = x(x + y + z) + yz = x \frac{1}{xyz} + yz = \frac{1}{yz} + yz$$

, ami egy szám és reciprokának összege, tehát $(x + y)(x + z) \geq 2$.

A minimális 2 értéket felveszi például akkor, ha $y = z = 1$ és $x(x + 2) = 1$ teljesül, utóbbi $x = \sqrt{2} - 1$ áll fenn (pozitív x esetén). $\square$

2. megoldás, lejegyezte: Tajta Sára. Legyen $x + y = a$, $y + z = b$, $x + z = c$. Tekintsük az a , b és c számokat egy háromszög oldalainak (könnyen ellenőrizhető, hogy a háromszög-egyenlőtlenség teljesül rájuk).

A félkerület $s = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z$, így a Héron-képlet szerint a háromszög területe:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz} = 1.$$

A trigonometrikus területképletet felhasználva:

$$2 = 2T = ab \sin \gamma \leq ab = (x + y)(x + z).$$

$\square$

5. feladat (1963. évi OKTV 2. forduló 1. feladat, Lakner Hanna)

Oldjuk meg a $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$ egyenletet.

Csató Zita megoldása. Vonjunk le $\sin x \cos x$ -et az egyenletből:

$$\sin x + \cos x = 1 - \sin x \cos x$$

Emeljünk négyzetre:

$$(\sin x + \cos x)^2 = (1 - \sin x \cos x)^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin x \cos x$$

Ismert azonosság, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ezt kivonva az egyenletemből, megkapom, hogy:

$$2 \sin x \cos x = \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin x \cos x$$

Ha $\sin x$ és $\cos x$ egyike sem 0, akkor le tudunk osztani $\sin x \cos x$ -szel.

$$2 = \sin x \cos x - 2$$

Ennek az egyenletnek az lenne a megoldása, hogy $\sin x \cos x = 4$. Ez nem lehet, mert

$$|\sin x|, |\cos x| \leq 1.$$

Ebből következik, hogy $\sin x$ és $\cos x$ valamelyike 0.

Ha $\sin x = 0$, akkor az eredeti egyenletbe beírva megkapjuk, hogy $\cos x = 1$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Ha $\cos x = 0$, akkor $\sin x = 1$. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. □

6. feladat (KöMaL B.3933., Pálfi András)

Az a_n sorozatot a következőképpen értelmezzük: $a_1 = 1$, $a_{2n+1} + a_n = 1$, $a_{2n} = a_n$.
Mennyi a_{2006} ?

Tajta Sára megoldása. A defináló egyenletekre (1) és (2) megnevezéssel fogunk hivatkozni. A sorozat minden elemének az értéke 0 vagy 1 lesz, mivel a páros indexű elemeket (2) segítségével, a páratlan indexű elemeket pedig (1) segítségével lehet előállítani, és $a_1 = 1$.

Továbbá észrevehetjük, hogy kettes számrendszerben nézve az elemek indexét, (2) nem változtat azon, hogy páros vagy páratlan db 1-es van az indexben, mint ahogy az elem értékét sem változtatja, míg (1)-nél változik az index kettes számrendszerbeli alakjában az 1-esek darabszámának a paritása, ahogyan a különböző paritású indexhez különböző érték is tartozik.

Ebből következik, hogy ahol az index kettes számrendszerbeli alakjában páratlan db 1-es van, ott az elem értéke 1 (mivel $a_1 = 1$), ahol viszont az index kettes számrendszerbeli alakjában páros db 1-es szerepel, ott az elem értéke 0.

2006-nak a kettes számrendszerbeli alakja a következő: 11111010110, amelyben 8 db 1-es van. Tehát $a_{2006} = 0$. □

3. Nem tűnik algebrának

Két olyan feladat következik, amelyek kombinatorikus kérdésfeltevése nem feltétlenül árulja el, hogy érdekes algebrai fogalmakat mozgatnak: az előbbi permutáció-csoportok generálásáról szól, az utóbbi a prímrendű test feletti polinomok megértését igényli.

7. feladat (Kocsis Péter saját kitalálású feladata)

Ha a pakliban a kártyák sorrendje $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ volt, akkor emelhetünk úgy, hogy a kártyák sorrendje $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{2n}, a_1, \dots, a_{i-1}$ legyen.

Ha a pakliban a kártyák sorrendje $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ volt, akkor „összepörgethetünk” úgy, hogy a kártyák sorrendje $a_1, a_{n+1}, a_2, a_{n+2}, \dots, a_n, a_{2n}$ legyen.

Hányféleképpen tudjuk megkeverni a paklit, tetszőlegesen sok keverési lépésből?

Vödrös Dániel megoldása. Jelöljük az összepörgetést P -vel, az emelést $i = 2$ esetén E -vel, általánosan pedig ennek ismételtetéseként E^{i-1} -gyel. Továbbá legyen a helyben hagyás I .

Legyen F egy elvégezhető keverés. Legyen az F -beli ciklusok hosszának legkisebb közös többszöröse m . Ekkor $F^m = I$, mivel m minden ciklushossz többszöröse. Emiatt $F^{m-1} = F^{-1}$. Vagyis F inverze elvégezhető.

Az első két elem felcserélhető az alábbi keveréssorozattal:

$$P^{-1} \rightarrow a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, a_2, a_4, \dots, a_{2n-2}, a_{2n}$$

$$E \rightarrow a_3, a_5, a_7, \dots, a_{2n-1}, a_1, a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}, a_{2n-2}$$

$$P \rightarrow a_3, a_4, a_5, \dots, a_{2n-2}, a_{2n}, a_2, a_1$$

$$E^{-2} \rightarrow a_2, a_1, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{2n-2}, a_{2n}$$

Jelölje ezt a keverést S .

A pakliban tetszőleges két szomszédos kártya (a_j és a_{j+1}) felcserélhető az alábbi keveréssorozattal:

$$E^{j-1}, S, E^{-j+1}.$$

Ennek a lépésnek a többszöri alkalmazásával pedig tetszőleges keverés elérhető, vagyis mind a $(2n)!$ -féle lehetséges állás elérhető. $\square$

8. feladat (Kvant M.2757. speciális esete, Szakács Ábel)

Legyen p egy prím. Legyenek $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ egész számok egy körön. Egy lépésben azt csináljuk, hogy kiválasztunk egy k egész számot, és minden a_i -t kicserélünk $a_i - a_{i+k}$ -ra (az indexek modulo p értendők). Határozzuk meg a legkisebb m -et, amelyre m lépés után mindig csak p -vel osztható számok lesznek a körön.

Holló Martin megoldása. Azt fogjuk megmutatni, hogy $m = p$.

Könnyen látható, hogy $m \geq p$, hisz ha $a_0 = 1$, és minden más szám 0, és mi mindig a k -t 1-nek választjuk, akkor indukcióval triviális, hogy i lépés után csak az utolsó i szám értéke változhatott meg, tehát ahhoz hogy a_0 az osztható legyen p -vel legalább p lépés kell.

Lagrange-interpolációval vegyünk egy olyan legfeljebb $p - 1$ fokú $f_0(x)$ polinomot, amelyre $f_0(i) = a_i$ minden $i = 0, 1, \dots, p - 1$ esetén. A Lagrange-interpoláció tulajdonságai miatt az együtthatók racionális számok és a nevezők nem oszthatók p -vel, hiszen $(p - 1)!$ nem osztható p -vel. Így minden nevezőnek van olyan többszöröse, amely 1 maradékot ad p -vel osztva. Ezekkel felszorozva az f_0 polinomot egy egész együtthatós f polinomot kapunk, amelyre $f(i) \equiv a_i \pmod{p}$.

Így mod p nézve $f(x)$ és $f(x + p)$ egyenlő, tehát mod p mi valójában egy lépésben azt csináljuk, hogy $f(x)$ -et lecseréljük az $f(x) - f(x + k)$ -ra (ahol k az általunk választott konstans). Így a kapott polinom fokszáma kisebb lesz, mint az eredetié. Tehát $p - 1$ lépésen belül konstans polinomot kapunk, és még 1 lépés múlva pedig a konstans 0 polinomot kapjuk mod p . $\square$

Németh Márton megoldása, lejegyezte Holló Martin. Legyen

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{p-1}x^{p-1}.$$

Ekkor ha az együtthatókat és a kitevőket is mod p nézzük akkor egy lépésben valójában az történik, hogy a jelenlegi polinomunkat megszorozzuk $(1 - x^{p-k})$ -nal. És ekkor valamennyi lépés után az i . helyen lévő számunkat úgy kaphatjuk meg, hogy a polinomnak csak azoknak a monomjait vesszük, ahol a kitevő i maradékot ad p -vel osztva, és ezek együtthatóit összeadjuk. Azt is feltehetjük, hogy $0 \leq k \leq p - 1$, és így $(1 - x^{p-k})$ -ból a $1 - x$ kiemelhető, és így p lépés után a polinomból az $(1 - x)^p$ kiemelhető, ahol az együtthatókat és a kitevőket mod p nézve ez a nullpolinom. Az triviális hogy ezeket mod p nézve a nullpolinomot bármivel megszorozva a nullpolinomot kapjuk, vagyis beláttuk, hogy p lépés múlva minden szám osztható p -vel. $\square$

4. Komplex sokszögek

Két olyan feladat következik, amely egyelő szögű sokszögekről, avagy igazából komplex egységgyökökről szól.

9. feladat (?, Ta Minh Khoa)

Bizonyítsd be, hogy létezik olyan 2022-szög, amelynek az összes belső szöge ugyanakkora és oldalainak hossza $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2022^2$ valamilyen permutációja.

Megoldás Sárdinecz Dóra vázlata alapján. Van ilyen 2022-szög. Olyan sokszöget konstruálunk, amelyben a $1^2, 2^2; 3^2, 4^2; 5^2, 6^2; \dots; 2021^2, 2022^2$ párok egy-egy szemközti oldalpár hosszai, és minden külső szöge $2\pi/2022$ (radiánban), azaz megegyezik a szabályos 2022-szög külső szögével. Rövidítsük meg mindegyik szemközti oldalpár mindkét tagját a pár rövidebb tagjának hosszával. Így a feladatot visszavezethetjük egy olyan speciális 2022-szög konstrukciójára, amelyben az oldalainak fele 0 hosszú, míg egy-egy 0 hosszú oldallal szemközt egy-egy $(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k-1$ hosszú oldal áll, ahol $k = 1, 2, \dots, 1011$. Ebben a speciális 2022-szögben is igaz, hogy, hogy minden külső szöge $2\pi/2022$, de persze egy-egy 0 hosszú oldal végeinél levő külső szögek közös csúccsal jelennek meg. Olyan speciális 2022-szöget fogunk konstruálni, amelyben a 0 és a pozitív hosszúságú oldalak felváltva következnek. Így minden 0 hosszú oldal végén két db $2\pi/2022$ nagyságú külső szög áll össze 1 db $2\pi/1011$ nagyságú külső szöggé. Azaz a 0 hosszúságú oldalakat nem tekintve, éppen egy olyan 1011-szög marad, amelynek minden külső szöge $2\pi/1011$ (a szabályos 1011-szög külső szöge), míg oldalai $3, 7, 11, \dots, 4k-1, \dots, 4043$ valamilyen sorrendben.

Ismert, hogy egy ilyen sokszög konstrukciója ekvivalens azzal, hogy a $3, 7, 11, \dots, 4043$ számoknak egy olyan $a_1, a_2, \dots, a_{1011}$ permutációját megadjuk, amelyben $\sum_{i=1}^{1011} a_i \omega^i = 0$, ahol $\omega = e^{2\pi/1011}$, azaz a legkisebb pozitív argumentumú 1011-edik komplex egységgyök.

Elegendő tehát egy ilyen permutációt megadnunk. Mivel $1011 = 3 \cdot 337$, ezért bármely k -ra $\omega^k + \omega^{k+337} + \omega^{k+674} = 0$ (egy szabályos háromszög három oldala). Ezt felhasználva írjuk fel az alábbiakat (az első sor a z definíciója).

$$\begin{aligned} z &= 3\omega^0 + 7\omega^{337} + 11\omega^{674} = 4\omega^{337} + 8\omega^{674} \\ \omega z &= 15\omega + 19\omega^{338} + 23\omega^{675} = 4\omega^{338} + 8\omega^{675} \\ \omega^2 z &= 27\omega^2 + 31\omega^{339} + 35\omega^{676} = 4\omega^{339} + 8\omega^{676} \\ &\vdots \\ \omega^{336} z &= 4035\omega^{336} + 4039\omega^{673} + 4043\omega^{1010} = 4\omega^{673} + 8\omega^{1010} \end{aligned}$$

Ezek összege

$$z(\omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{336}) = 0$$

(hiszen $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{336}$ egy szabályos 336-szög oldalai), tehát az egyenletrendszerből egy alkalmas $a_1, a_2, \dots, a_{1011}$ permutáció olvasható ki. $\square$

10. feladat (Putnam 2008/A5, Sárdinecz Dóra)

Legyen $n \geq 3$ egy egész. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két valós együtthatós polinom úgy, hogy a koordinátarendszer

$$(f(1); g(1)), (f(2); g(2)), \dots, (f(n); g(n))$$

pontjai egy szabályos n -szög egymást követő csúcsai pozitív körüljárás szerint.

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ vagy $g(x)$ foka legalább $n - 1$.

Szakács Ábel megoldása. A valós kétdimenziós koordinátarendszer helyett tekintsük a komplex síkot: az $f(1) + g(1)i, f(2) + g(2)i, \dots, f(n) + g(n)i$ komplex számok egy szabályos n -szöget alkotnak, a feladat állítása pedig ekvivalens azzal, hogy $f(x) + g(x)i$ foka legalább $n - 1$. Legyen $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ az első n -edik egységgyök. Legyen z_1 a szabályos n -szög középpontja, és legyen $z_2 = f(1) + g(1)i - z_1$, ekkor $f(k) + g(k)i = z_1 + \epsilon^{k-1}z_2$ $k = 1, 2, \dots, n$ -re. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a

$$h(x) = \frac{f(x+1) + g(x+1)i - z_1}{z_2},$$

polinomot (ennek a foka megegyezik $f(x) + g(x)i$ fokával), ekkor $h(k) = \epsilon^k$ $k = 0, 1, \dots, n-1$ -re.

Tegyük fel indirekten, hogy h foka legfeljebb $n-2$. Ekkor ha felírjuk a Lagrange interpolációt h -ra a $0, 1, \dots, n-1$ helyeken, akkor x^{n-1} együtthatója 0 kéne, hogy legyen, belátjuk, hogy nem 0.

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n-1} \frac{x - j}{k - j}$$

Ebben x^{n-1} együtthatója:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n-1} \frac{1}{k - j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon^k (-1)^{n-1-k}}{k!(n-k-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} = \frac{(\epsilon - 1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$\epsilon \neq 1$, így ez nem 0, ezt akartuk belátni. □

Sárdinecz Dóra megoldása, leírta Szakács Ábel. Az első megoldáshoz hasonlóan legyen

$$h(x) = \frac{f(x+1) + g(x+1)i - z_1}{z_2},$$

azt akarjuk belátni, hogy ennek a foka legalább $n - 1$.

Tekintsük a $p(x) = h(x+1) - \epsilon h(x)$ polinomot, ennek a foka megegyezik h fokával, mert a főegyütthatója $(1 - \epsilon)$ -szorosa lesz h főegyütthatójának. Vegyük észre, hogy $k = 0, 1, \dots, n-2$ -re $p(k) = \epsilon^{k+1} - \epsilon \epsilon^k = 0$, így p -nek van legalább $n - 1$ gyöke (és nem konstans 0, mert h se), tehát a foka legalább $n - 1$, ezt akartuk belátni. □

5. Számelméleti vegyesfelvágott

11. feladat (IMO Shortlist, Chen JiaTong)

Legyenek $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ természetes számok ($k > 2$), amelyekre teljesül, hogy

$$n_2 \mid 2^{n_1} - 1, \quad n_3 \mid 2^{n_2} - 1, \quad \dots, \quad n_k \mid 2^{n_{k-1}} - 1, \quad n_1 \mid 2^{n_k} - 1.$$

BBH: $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$.

Czirják Márton megoldása. Vegyük észre hogy ha az egyik szám 1 akkor az összes többi is, mivel $2^1 - 1 = 1$, aminek csak az 1 az osztója. (Így „körbemenve” tényleg mindegyik 1 kell hogy legyen.)

Emellett vegyük észre hogy minden n_j szám páratlan, mivel egyik szám sem lehet páros, hiszen bármely j természetes számra $2^j - 1$ páratlan, így nem lehet osztható egy páros számmal.

Most tegyük fel, hogy $\forall i \ n_i \neq 1$. Ekkor legyen az $\prod_{j=1}^k n_j$ szám legkisebb prímosztója p_i . Tegyük fel hogy $p_i \mid n_i$. Ha több ilyen i van akkor választunk egyet. Most vegyük észre hogy

$$2^{n_{i-1}} - 1 \equiv 0 \ (n_i) \implies 2^{n_{i-1}} - 1 \equiv 0 \ (p_i) \implies n_{i-1} \equiv 0 \ (\text{ord}_{p_i}(2)).$$

Itt i és $i-1$ modulo k értendő. (Ahol a kiválasztott maradékrendszer az $\{1, 2, \dots, k\}$) A kis Fermat-tétel miatt $\text{ord}_{p_i}(2) \mid p_i - 1$, és ebből $\text{ord}_{p_i}(2) \leq p_i - 1$, tehát n_{i-1} -nek van olyan prímosztója ami osztja, így kisebb egyenlő mint $\text{ord}_{p_i}(2) \leq p_i - 1 < p_i$. (Itt a kis Fermat-tételhez fontos hogy $p_i \neq 2$, mivel az n számok páratlanok.) Ez ellentmondás, mivel így nem p_i a legkisebb prímosztó ami előfordul. Ez azt jelenti, hogy csak akkor lehet a feladat állítása igaz, ha nincs legkisebb prímtenyező, vagyis $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$. Ezt akartuk bizonyítani. (Az $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$ esetben tényleg teljesül a feladat állítása.) $\square$

12. feladat (Kürschák 1990/1, Lakner Hanna)

Legyen p páratlan prímszám, n pedig pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy pn^2 -nek legfeljebb egy olyan d pozitív osztója van, amelyekre $d + n^2$ négyzetszám.

Megoldás (leírta: Sohár Bernadett). A feladat olyan k és m olyan egész számokat keres (adott n és p mellett), amelyekre $pn^2 = dk$ és $d + n^2 = m^2$. Tekintsünk egy ilyen (d, k, m, n, p) számötöst. Ezekre persze:

$$(p + k)n^2 = kd + kn^2 = km^2$$

Legyen n és m legnagyobb közös osztója d_0 . Ekkor $n = d_0 n_0$ és $m = d_0 m_0$ ahol n_0 és m_0 relatív prímek. A fenti egyenletet d_0 -lal egyszerűsítve:

$$(p + k)n_0^2 = km_0^2.$$

Tehát $n_0^2 \mid km_0^2$, azaz mivel n_0 és m_0 relatív prímek: $n_0^2 \mid k$. Így van olyan k_0 egész, amelyre $k = n_0^2 k_0$. Ezt behelyettesítve és egyszerűsítve $p + k_0 n_0^2 = k_0 m_0^2$, átrendezve:

$$p = k_0(m_0^2 - n_0^2) = k_0(m_0 - n_0)(m_0 + n_0).$$

Mivel p prím, a jobb oldalon lévő egyik tényező értéke p , a másik kettőé 1.

Mivel $m_0 + n_0 > m_0 - n_0$, ezért csak így lehet:

$$m_0 + n_0 = p, \quad k_0 = m_0 - n_0 = 1.$$

Ebből $m_0 = \frac{1}{2}(p+1)$, $n_0 = \frac{1}{2}(p-1)$. Ha tehát p és n értéke adott, akkor n_0 és m_0 és ezekből következően $d_0 = n/n_0$, ill. $m = d_0 m_0$, végül $d = m^2 - n^2$ értéke is egyértelműen meghatározott. Tehát d egyértelmű p és n ismeretében. Megfelelő d csak akkor létezik, ha $\frac{1}{2}(p-1) \mid n$. $\square$

13. feladat (KöMaL B.4655., Holló Martin)

Megoldható-e a pozitív egész számpárok halmazán a $2012^{2015} = \binom{n}{2} + \binom{k}{2}$ egyenlet?

Ta Minh Khoa megoldása. Négyzetszámokkal egyszerűbb dolgozni mint háromszögszámokkal, mert többet tudunk róluk. Ha eleget *mókoljuk*¹ az egyenletet, akkor a jobb oldalt két teljes négyzet összegévé alakíthatjuk. Ehhez szorozzuk fel 8-cal az egyenletet és adjunk hozzá 2-t. Ezután ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} 2012^{2015} &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} && / \cdot 8 \\ 8 \cdot 2012^{2015} &= 4n^2 - 4n + 4k^2 - 4k && / + 2 \\ 8 \cdot 2012^{2015} + 2 &= 4n^2 - 4n + 1 + 4k^2 - 4k + 1 \\ 8 \cdot 2012^{2015} + 2 &= (2n-1)^2 + (2k-1)^2. \end{aligned}$$

Ha egy szám két négyzetszám összege, akkor minden $4k+3$ alakú prímtényezője páros kitevőn van. Ez az állítás egyszerűen levezethető a *kétnégyzetszám-tétel*ből. (Egy megjegyzésben alább erről írunk még.) A kis Fermat-tétel szerint $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, azaz

$$2012^{2015} \equiv 3^{2015} \equiv 3^5 \equiv 5 \pmod{7}$$

amiből

$$8 \cdot 2012^{2015} + 2 \equiv 8 \cdot 5 + 2 \equiv 42 \equiv 0 \pmod{7}$$

azaz $8 \cdot 2012^{2015} + 2$ osztható 7-tel. Ezért 49-cel is oszthatónak kell lennie ahhoz, hogy előállhasson két négyzetszám összegeként. Az Euler-Fermat-tételt használva ($\varphi(49) = 42$):

$$8 \cdot 2012^{2015} + 2 \equiv 8 \cdot 3^{2015} + 2 \equiv 8 \cdot 3^{41} + 2 \pmod{49}$$

Mivel $\varphi(49) = 42$, ezért 3^{41} éppen a 3 inverze mod 49. Számítsuk ezt ki – szerencsére itt nem lesz olyan nehéz dolgunk, mivel $49 = 3 \cdot 16 + 1$. Szóval,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 16 + 1 &\equiv 0 \pmod{49} \\ -3 \cdot 16 &\equiv 1 \pmod{49} \\ 3 \cdot (-16) &\equiv 1 \pmod{49} \\ 3^{-1} &\equiv -16 \equiv 33 \pmod{49} \end{aligned}$$

¹„MÓKOL: szuszogva, lustán végez valamit. »Mit mókósz éppen? Iparkodj!«” forrás: Kiss Géza: Az ormánsági nyelvjárásból In: Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Franciscus-Josephinae : sectio philologico-historica 6. (1934) 287. oldal <https://acta.bibl.u-szeged.hu/10522/>

Behelyettesítve:

$$8 \cdot 33 + 2 \equiv 266 \equiv 19 \not\equiv 0 \pmod{49}$$

Mivel $8 \cdot 2012^{2015} + 2$ prímtényezős felbontásában a 7 páratlan kitevőn van, ezért nem lehet két négyzetszám összege.

Megjegyzés. Honnan tudjuk, hogy ha egy szám két négyzetszám összege, akkor minden $4k + 3$ alakú prímtényezője páros kitevőn van? Idézzük fel a bizonyítás legérdekesebb részét.

Legyen $p = 4k + 3$, $p \mid n$ és $a^2 + b^2 = n$, ekkor

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p} \implies a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}.$$

Tegyük fel, hogy $p \nmid b$ és osszunk le b^2 -tel. $(ab^{-1})^2 \equiv -1 \pmod{p}$, de -1 az nem kvadratikusan maradék $4k + 3$ prímek esetén. (Létezik b^{-1} , mivel $\text{lnko}(b, p) = 1$.) Tehát $p \mid b$ és ugyanígy levezethető, hogy $p \mid a \implies p^2 \mid a^2 + b^2 = n$. $\square$

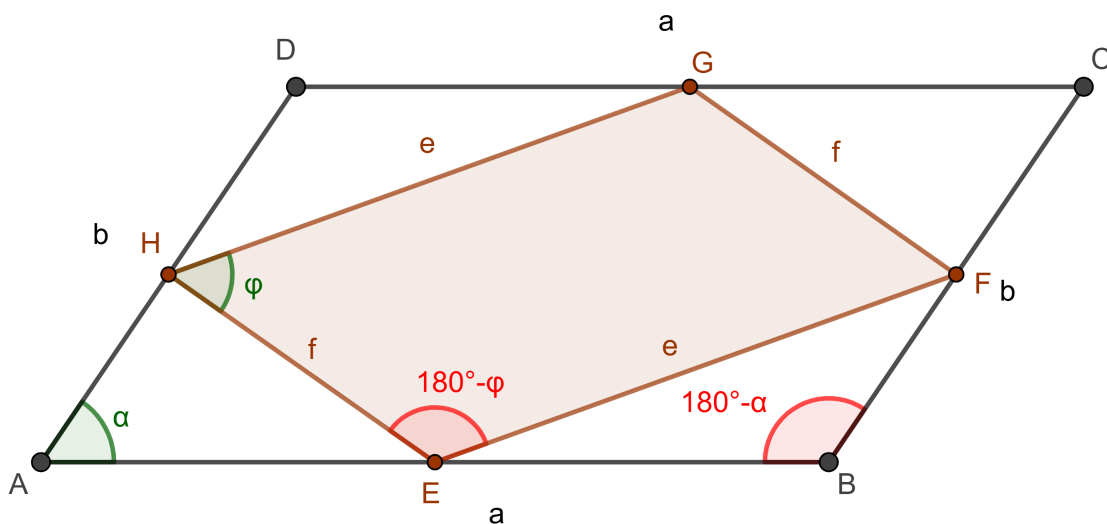
6. Geometriai finomfőzelék

14. feladat (Czirják Márton saját kitalálású feladata)

Határozzuk meg az összes olyan paralelogrammát, amely hasonló az oldalfelező pontjaiból alkotott paralelogrammához.

Hujter Bálint megoldása. Tekintsünk egy $ABCD$ paralelogrammát, melynek oldalfelezőpontjai E, F, G, H az ábra szerint. Használjuk továbbá a következő jelöléseket:

$$AB = DC = a, \quad BC = AD = b, \quad EF = HG = e, \quad FG = EH = f, \quad \angle BAD = \alpha, \quad \angle EHG = \varphi.$$



Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b$ és $\alpha \leq 90^\circ$ (és így persze $\angle CBA = 180^\circ - \alpha \geq 90^\circ$). Ilyenkor persze $e \geq f$, hiszen AEH és EBF háromszögekben felírva a Pitagorasz-egyenlőtlenségeket (koszinusz-tételeket):

$$e^2 \geq (a/2)^2 + (b/2)^2 \geq f^2$$

Az is belátható, hogy $\varphi \leq 90^\circ$. Hiszen HEF háromszögben a HF oldalra, míg GHE háromszögben a GE oldalra felírva a koszinusztételt:

$$a^2 = e^2 + f^2 + 2ef \cos \varphi$$

$$b^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos \varphi$$

Tehát ha $a^2 \geq b^2$, akkor $\cos \varphi \geq 0$, azaz $\varphi \leq 90^\circ$.

Az eddigi megállapításaink figyelembevételével $ABCD$ és az $EFGH$ paralelogrammák akkor és csak akkor lesznek hasonlóak, ha

$$\text{egyszerre teljesül, hogy } \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \text{ és } \alpha = \varphi.$$

Meggondolható, hogy az így kapott D pontok mértani helye egy olyan kör, amelynek középpontja az a B' pont, amelyet B pont A -ra való tükrözésével kaphatunk. Látható, hogy a paralelogramma nyílásszöge tetszőleges hegyesszög lehet. $\square$

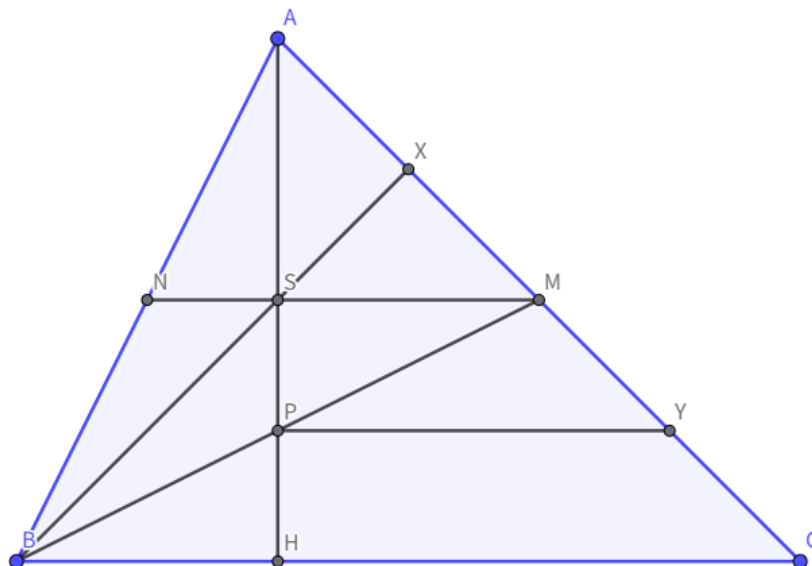
15. feladat (?^a, Prohászka Bulcsú)

^aA feladatot egy MEMO-felkészítő foglalkozáson hallotta P.B. Bán-Szabó Árontól

Az ABC háromszögben az AH magasság felezi a BM súlyvonalat.

Bizonyítsuk be, hogy az ABM háromszög súlyvonalai egy derékszögű háromszög oldalai.

Sha Jingyuan megoldása. Legyen AB felezőpontja N , AM felezőpontja X , MC felezőponja Y , ABM súlyponja S , $AH \cap BM = P$.



A középvonal ismert tulajdonságai szerint $\frac{BC}{2} = NM = PY$ és $BC \parallel NM \parallel PY$, vagyis ASM derékszögű és APY is derékszögű háromszögek.

Az ASM háromszögben a Thalész-tétel megfordítása miatt $XS = XM$. Tehát $\angle XSM = \angle XMS$, az $NM \parallel BC$ párhuzamosság miatt $\angle XBC = \angle XCB$, azaz $BX = XC = CY$.

Tehát PAY egy olyan derékszögű háromszög, melynek oldalai páronként megegyeznek ABM súlyvonalaival (AP közös oldal, $PY = NM$, $YA = BX$). $\square$

16. feladat (?, Bui Nikolett)

Legyen $ABCDEF$ egy konvex hatszög, amelyre $\angle A = \angle C = \angle E$ és $\angle B = \angle D = \angle F$, továbbá az $\angle A$, $\angle C$, és $\angle E$ szögek (belső) szögfelezői egy ponton mennek át.

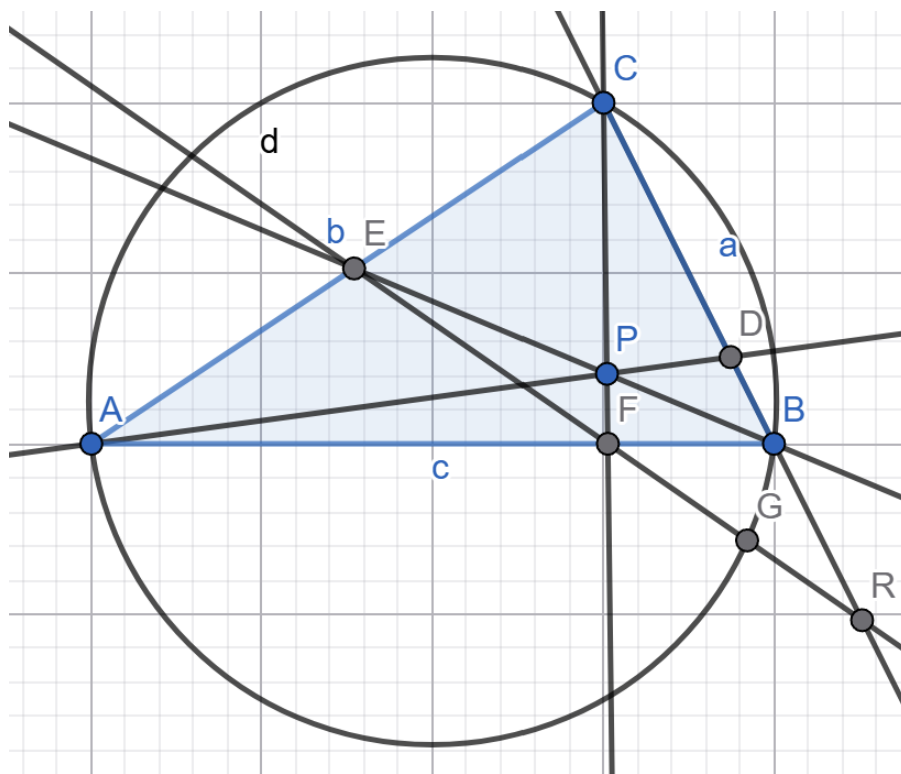
Bizonyítsd be, hogy a $\angle B$, $\angle D$ és $\angle F$ szögek (belső) szögfelezői szintén egy ponton mennek át.

?

$\square$

17. feladat (Sha Jingyuan saját feladata)

Legyen ABC háromszög és egy P pont a síkon. Legyen $AP \cap BC = D$, $BP \cap AC = E$, $CP \cap AB = F$. Legyen BC felezőpontja M . EF egyenes messe ABC körül írt körét G, H pontokban. Bizonyítsuk be, hogy G, H, D, M egy körre esnek.



A Quadrumviratus csapat megoldása (leírta Lakner Hanna). Legyen $BC \cap GH = R$. Az R középpontú, az ABC körre merőleges körre invertálunk, azaz az ABC kör a helyén marad. Emiatt a G és H pontok helyet cserélnek, és a B és C pontok is.

Tekintsük a $BCDR$ harmonikus pontnégyest. Mivel az inverzió kettősviszonytartó ezért tudjuk, hogy az inverzió után is harmonikus pontnégyest fognak alkotni.

Az R középpontú körre való inverzió miatt R a végtelen távoli pontba megy, mint azt az előbb megállapítottuk B és C pontok helyet cserélnek, így a harmonikus pontnégyes megtartása miatt a D az M pontba megy.

Ezután nézzük az $RD \cdot RM$ és $RH \cdot RG$ szorzatokat. Felhasználva a inverzió definícióját és az előbb megállapítottakat, kiderül, hogy mindkét szorzat értéke r^2 . Azaz, mivel R -ből ugyanaz a hatványa a két szorzatnak, ezért a négy pont (G, H, D, M) egy körön vannak. $\square$

7. Kombinatorikus desszertek

18. feladat (Folklór, Juhász-Molnár Mirkó)

Autónkkal egy kör alakú autópályán kell körbehaladnunk. A pálya mentén bizonyos helyeken benzinkutak vannak, az ezekben található összes üzemanyag két kör megtételére elég. Igazoljuk, hogy a benzinkutak közül kiválasztható legalább egy, amelytől bármelyik irányba elindulva oda visszajuthatunk.

Veres Dorottya megoldása. Teljes indukcióval fogjuk bizonyítani az állítást.

Ha minden kútból el tudunk jutni a 2 mellette lévőbe, akkor biztosan lesz jó kút, mindegyik az.

Ha van olyan kút, X , amiből nem tudunk eljutni a vele szomszédosba, Y , akkor az azt jelenti, az XY távolság nagyobb, mint amennyire elég benzin az X kútban van. Legyen a Z pont az, ameddig el tudunk jutni az X kútból Y felé az ott lévő benzinnel. A kör hosszából vegyük el az XZ szakaszt és csökkentsük n -nel (ennyi üzemanyag van X -ben) az üzemanyag mennyiséget az X és Y pontokban, így X -ben pont 0 benzin lesz, Y -ban n -nel kevesebb.

Így most eggyel kevesebb benzinkút van egy kisebb körön, mint az előbb. Ha az előbb elég volt két teljes körre az összes üzemanyag, akkor a kisebb körben is elég, hiszen az eltávolított szakasz duplájával lett kevesebb üzemanyag.

Ebben a kisebb körben már kell, hogy legyen egy jó benzinkút, mutassuk meg, hogy ez a nagyobb körben is jó kút lesz. A kisebb körben meg tudta tenni az XY távolságot úgy, hogy X -ben nem volt üzemanyag, akkor a nagyobb körben is meg tudja tenni, hiszen pont annyival lett hosszabb az út, mint amennyi üzemanyaggal több lett X -ben. A másik irányba pedig az YX távolságot ugyanígy meg tudja tenni, mert Y -ban is annyival lett több üzemanyag, amennyivel a szakasz nőtt.

Tehát k benzinkútra van jó benzinkút, ha $k - 1$ re volt, tehát ha egy benzinkútra volt ilyen, akkor k -ra is lesz. Egyre pedig az az egy benzinkút jó lesz. $\square$

19. feladat (?, Dulácska Dániel)

A négyzetrácson *amőbának* nevezzük mezőknek egy véges egybefüggő halmazát (azaz nincs olyan mező, amely teljesen izolált lenne). A négyzetrács minden mezőjébe beleírunk egy valós számot. Jelöljön A_1 és A_2 két amőbát. Tudjuk, hogy bárhogyan is toljuk el A_1 -et, a benne lévő számoknak az összege mindig pozitív. Bizonyítsuk be, hogy A_2 -nek is van olyan eltoltja, melyben a számok összege pozitív. (Csak egész koordinátájú eltolásokat vizsgálunk, azaz ahol mező mezőbe kerül.)

Sánta Gergely megoldása. Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy nincs A_2 -nek olyan eltoltja, amelyben a számok összege pozitív, azaz A_2 minden eltoltjában a számok összege negatív vagy nulla.

Az alapötlet, hogy vegyünk egy olyan véges alakzatot, amely lefedhető A_1 és A_2 amőbával is. Ekkor ezen belül összeadhatjuk a számokat kétféle módon: az A_1 -es lefedés szerint minden A_1 -es részben a számok összege pozitív, tehát a teljes alakzaton belül is pozitív. Azonban ha

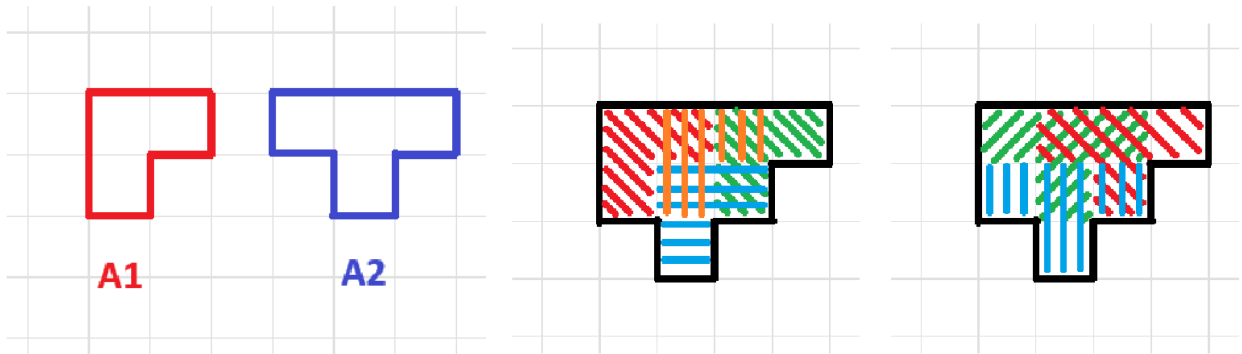
az A_2 -es lefedés szerint adjuk össze, minden kisebb A_2 -es részben a számok összege legfeljebb nulla, tehát a teljes egészben is. Ez ellentmondáshoz vezet, ezzel megoldva a feladatot. Most keressünk megfelelő alakzatot!

Vegyük észre, hogy a fenti bizonyításban sehol nem használtuk ki a választott alakzat milyenségét, így további könnyítéseket tehetünk: megengedjük, hogy egy-egy mezőt többször is kiválasszunk (de ekkor azt ugyanannyiszor kell lefednünk A_1 és A_2 amőbákkal).

Legyen az alakzatunk a következő: Vegyünk annyi A_1 amőbát, ahány mezőből áll A_2 és toljuk el „ A_2 alakban”, ez így összesen $|A_1| \cdot |A_2|$ kiválasztott mező. Ezután hasonlóan vegyünk annyi A_2 amőbát, ahány mezőből áll A_1 és toljuk el A_1 alakban. Ez szintén $|A_1| \cdot |A_2|$ kiválasztott mező. (Egy mezőt valószínűleg többször is kiválasztunk, ilyenkor azt a megfelelően sokszor számoltuk bele.) Meggondolható, hogy az így kapott két alakzat egybevágó lesz.

Más irányból is megközelíthető ugyanez az alakzat: Legyen X_1 és X_2 két pozitív szám-párokból álló halmaz, amely az A_1 és A_2 amőbák mezőinek koordinátapárjait tartalmazza. Képezzük az X_1 és X_2 halmazok kereszt-szorzatát (Descartes-szorzatát, ekkor elempárokat készítünk, amelyben az első halmaz minden eleméhez hozzápárosítjuk a második halmaz mindegyik elemét), majd az így kapott párokban adjuk össze a megfelelő koordinátákat, ezáltal ismét koordinátapárokat kapva. Ezek lesznek a kiválasztott mezők ($A_1 \circ A_2$ darab). Ekkor könnyebben látható a kétféle lefedés teljesülése.

Példa. Legyen az A_1 és A_2 alakzatunk a következő. Ekkor a végső alakzatok a 2. ábrán láthatóak.



A halmazok:

$$X_1 = \{\{0; 0\}; \{0; 1\}; \{1; 1\}\} \quad \text{és} \quad X_2 = \{\{0; 1\}; \{1; 0\}; \{1; 1\}; \{2; 1\}\}$$

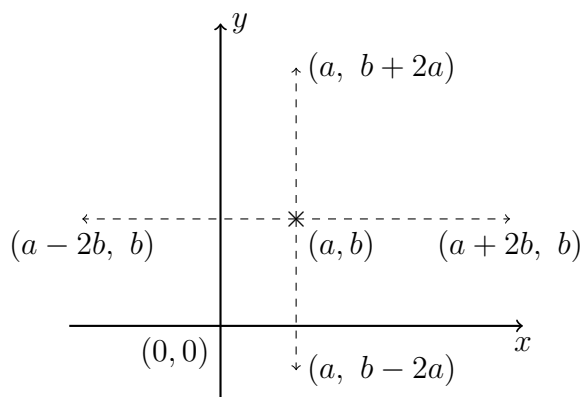
A művelet után:

$$\begin{aligned} X_1 \triangle X_2 = & \{\{0; 1\}; \{1; 0\}; \{1; 1\}; \{2; 1\}; \\ & \{0; 2\}; \{1; 1\}; \{1; 2\}; \{2; 2\}; \\ & \{1; 2\}; \{2; 1\}; \{2; 2\}; \{3; 2\}\} \end{aligned}$$

□

20. feladat (Kürschák 1989/3., Sánta Gergely)

A koordináta-rendszer egy tetszőleges pontjából egy lépésben vagy az abszcisszája kétszeresével mehetünk fel vagy lefelé, vagy pedig az ordinátája kétszeresével jobbra vagy balra. Egyik lépés után sem szabad azonnal visszalépni. Bizonyítsuk be, hogy ha az $(1; \sqrt{2})$ pontból indulunk, akkor oda véges sok lépésben nem tudunk visszajutni.



Megoldás, lejegyezte Dulácska Dániel. Először is lássuk be, hogy ha a és b aránya kezdetben irracionális, akkor utána sosem lehet racionális, mert ha egy lépés után az lenne, akkor onnan már csak racionális arányú pontokra lehetne lépni, pedig az előző útvonalon visszafelé haladva irracionális pontra kéne érünk, ami ellentmondás. Ebből az következik, hogy a és b sosem lehet egyenlő, vagy 0.

Most feltehetjük, hogy $0 < a$ és $0 < b$, mert a negativitás nem számít a lépéseknél. Ekkor vegyük észre, hogy pontosan egy olyan lépésünk van, amellyel közelíthetünk az origóhoz, míg minden más lépéssel távolodunk.

- Ha $a > b$, akkor $(a - 2b, b)$ -re kell lépni, mert $|a - 2b| < a$.
- Ha $a < b$, akkor $(a, b - 2a)$ -ra kell lépni, mert $|b - 2a| < b$.

A többi lépés során mindig távolodunk, hiszen az egyik koordináta nem változik, míg a másik abszolút értéke nő.

Most tegyük fel indirekt módon, hogy véges sok lépésben vissza lehet jutni az $(1, \sqrt{2})$ pontba. Ekkor keressük meg azt a pontot, ahol az origótól a távolság a legnagyobb (több pont esetén tetszőleges jó lesz). Ha ez a pont az $(1, \sqrt{2})$, akkor az útvonalnak az első lépése és az utolsó lépése azonos (csak ellentétes irányban), mert elvileg minden pont közelebb van az origóhoz, és az az egyetlen lépés teljesíti ezt a feltételt. Ilyenkor vizsgáljuk az utat enélkül a két lépés nélkül (azaz ezen a részhalmazon keressük az origótól való új legtávolabbi pontot). Ha az út elfogy azelőtt, hogy találnánk megfelelő pontot, az azt jelenti, hogy a középső lépésnél megfordultunk, azaz a megoldás nem helyes. Így feltételezhetjük, hogy lesz ilyen pont. Ekkor ebbe a pontba létezne két olyan lépés is, amellyel az origó felé közelítünk, hiszen az egyiket odafelé mentünk, a másikon pedig visszafelé, és ez a két út nem azonos. De ez nem lehetséges.

Mivel ellentmondásba ütköztünk, így az eredeti feltevésünknek hamisnak kell lennie, azaz nem lehet visszajutni véges sok lépésben. $\square$

21. feladat (EGMO 2013/6, Horák Zsófia)

Hófehérke és a hét törpe erdőbeli házukban élnek. 16 egymást követő nap mindegyikén minden törpe eldöntötte, hogy aznap a gyémántbányában dolgozzon, vagy bogyókat gyűjtsön az erdőben. Bármely két (nem feltétlenül egymást követő) napon legalább három törpe mindegyike mindkét munkát végezte. Továbbá az első napon mind a hét törpe a gyémántbányában dolgozott. Bizonyítsuk be, hogy a 16 nap valamelyikén mind a hét törpe bogyókat gyűjtött.

Kocsis Péter megoldása. Kódoljuk a napokat 7 tagú 0–1 sorozatokkal, aszerint, hogy az adott törpe bányába ment-e (0), vagy bogyót szedett (1). Az első nap tehát a 0000000 kódot viseli. Összesen $2^7 = 128$ különböző kód létezik, és bármely két kód között legalább 3 karakter eltérés van. Rendeljük minden naphoz azokat a kódokat, amelyek legfeljebb 1 karakterben térnek el tőle. Ekkor egy kódot nem rendelhetünk két különböző naphoz, hiszen akkor lenne két olyan nap, amelyek legfeljebb két karakterben különböznének. Ugyanakkor minden kódot hozzárendeltünk valamelyik naphoz, mivel egy naphoz pontosan 8 kód tartozik (az eredeti kód és a tőle 1 karakterben eltérő 7 darab). Mivel $128/8 = 16$, ezért minden kódot pontosan egy naphoz rendeltük hozzá.

Ha az első nap a 0000000, akkor azokhoz a kódokhoz, amelyek pontosan 2 darab 1-et tartalmaznak, csak olyan napot tudunk hozzárendelni, amelyben 3 darab 1 van, hiszen ha kevesebb lenne, akkor csak 2 karakterben térne el a 0000000-tól. Összesen $\binom{7}{2} = 21$ olyan kód van, amelyben 2 darab 1 szerepel. Egy 3 darab 1-et tartalmazó naphoz pontosan 3 ilyen kódot rendelünk, ezért $21/3 = 7$. **Összesen 7 olyan nap lesz, amikor 3 törpe szedett bogyót.**

Összesen $\binom{7}{3} = 35$ olyan kód van, amelyben 3 darab 1 szerepel. Ebből 7-et már hozzárendeltünk a fenti 7 naphoz, így $35 - 7 = 28$ kód maradt. A maradék 28 kódot csak 4 darab 1-et tartalmazó napokhoz rendelhetjük, mégpedig úgy, hogy minden ilyen naphoz pontosan 4 kód tartozik. Ezért $28/4 = 7$. **Összesen 7 olyan nap lesz, amikor 4 törpe szedett bogyót.**

A kimaradt egyetlen naphoz az összes 6 darab 1-et tartalmazó kódot kell hozzárendelnünk, amit csak az a nap teljesíthet, amelyben mind a 7 törpe bogyót szedett. Ezzel bizonyítottuk a feladat állítását.

Tehát ha rögzítjük az első napot, az meghatározza, hogy hány napon szedett 0, 1, 2, ..., 7 törpe bogyót. $\square$