

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK (8 – 15.)

8. feladat: Két osztálytárs a következőt állítja.

Bea: Feleannyi fiú osztálytársam van, mint lány osztálytársam.

András: Lány osztálytársaim száma éppen 12-vel kevesebb a fiú osztálytársak számának a négyszeresénél.

Hány lány jár az osztályba?

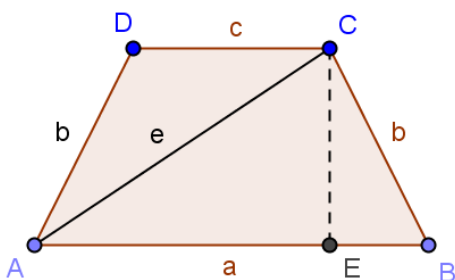
„Megoldás”:

Jelölje F és L a fiúk, illetve a lányok számát az osztályban.

$$\left. \begin{array}{l} (1) F = \frac{L-1}{2} \\ (2) L = 4(F-1) - 12 \end{array} \right\}$$

(2)-ből $L = 4F - 16$, ebbe beírjuk (1)-et: $L = 4 \cdot \frac{L-1}{2} - 16$, innen $L = 18$.

9. feladat: Egy húrtrapéz két párhuzamos oldala $AB = 17$ cm és $CD = 9$ cm, egyik átlója $AC = 13$ cm hosszú. Mekkora a húrtrapéz szárai?



„Első megoldás”: Ptolemaiosz tételét alkalmazzuk.

A húrtrapéz tengelyes szimmetriája miatt legyen $AD = BC = b$, $AC = BD = e$. Az ábrán látható jelölésekkel így $ac + b^2 = e^2$, innen $b^2 = e^2 - ac = 13^2 - 17 \cdot 9 = 16$. Eredmény: $b = 4$.

„Második megoldás”: Húzzuk meg az AB oldalra merőleges CE magasságot! Először meghatározzuk az AE és EB szakaszok hosszát, majd felírunk két Pitagorasz-tételt: az AEC háromszögben meghatározzuk EC -t, majd a BEC háromszögben BC -t.

$$EB = \frac{a-c}{2} = 4 \text{ cm} \Rightarrow AE = AB - EB = 13 \text{ cm}.$$

De itt ellentmondást kaptunk: az AEC derékszögű háromszög AE befogója és AC átfogója egyenlő hosszú lenne, ami nem lehetséges.

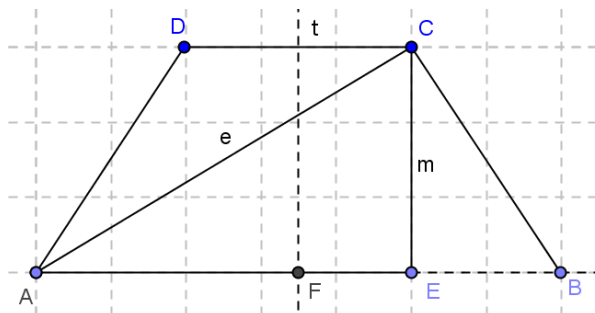
A feladatnak nincs megoldása.

10. feladat: Az $ABCD$ húrtrapéz magassága $m = 5$ cm, az átlójának hossza $AC = 13$ cm. Számítsuk ki a trapéz területét!

„Első megoldás”: A négyszögeket általában öt független adat határozza meg. Most a magasság és az átló hossza mellett ismert még a trapéz-tulajdonság (pl. AB és CD párhuzamos), valamint a tengelyes szimmetria miatt pl. az AD és BC oldalak egyenlősége. De

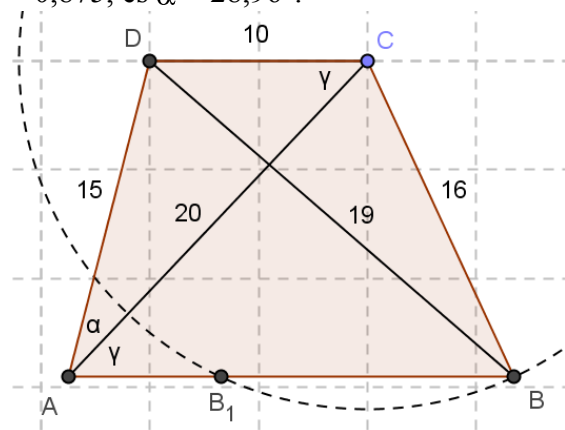
ez csak négy összefüggés. A feladat így alulhatározott, a húrtrapéz területe nem határozható meg.

„Második megoldás”: Az $AC = e$ átlóból és az m magasságból megkapjuk AE -t (az AC átló merőleges vetületét): $AE = e^2 - m^2 = 12$ (cm). Fentebb láttuk, hogy ez éppen akkora, mint a trapéz középvonala, így a terület számítható: $t = k \cdot m = 12 \cdot 5 = 60$ (cm²).



11. feladat: Az $ABCD$ trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak, három oldalának hossza: $BC = 16$ cm, $CD = 10$ cm, $AD = 15$ cm, az átlók hossza pedig $AC = 20$ cm és $BD = 19$ cm. Mekkora az AB oldal?

„Megoldás”: Először az ACD háromszög szögeit számoljuk ki. Legyen $\angle DAC = \alpha$, ekkor a koszinusztételből $10^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos \alpha$. Innen $\cos \alpha = \frac{15^2 + 20^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 20} = 0,875$, és $\alpha \approx 28,96^\circ$.



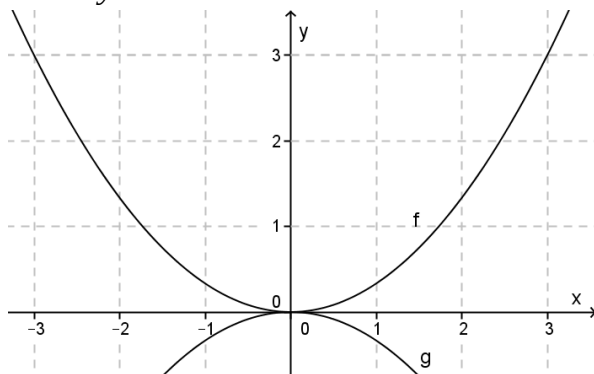
Kiszámítjuk $\angle ACD = \gamma$ -t is a szinusztétellel: $\frac{\sin \gamma}{15} = \frac{\sin \alpha}{10}$, innen $\sin \gamma \approx 0,73$, és $\gamma \approx 46,58^\circ$. ($\gamma > 90^\circ$ nem lehetséges, mert γ nem a legnagyobb szög az ACD háromszögben.)

$\angle ACD$ és $\angle CAB$ váltószögek, $\angle CAB = \gamma$, így $AB = a$ -t a CAB háromszögben felírt koszinusztétellel számolhatjuk ki. $16^2 = a^2 + 20^2 - 2 \cdot a \cdot 20 \cdot \cos \gamma$, innen $a^2 - 27,50 \cdot a + 144 = 0$. Az egyenlet gyökei $a_1 = 20,46$ (cm) és $a_2 = 7,04$ (cm).

Mindkét megoldás lehetséges (ábra).

12. feladat: (az előző feladat módosítása) Az $ABCD$ trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak, három oldalának hossza: $BC = 16$ cm, $CD = 10$ cm, $AD = 15$ cm, az átlók hossza pedig $AC = 20$ cm és $BD = 14,9$ cm. Mekkora az AB oldal?

13. feladat: Szemléltessük a sík azon $P(x, y)$ pontjainak a halmazát, amelyekre $x^4 \leq 9y^2$.



„Első megoldás”: $x^4 \leq 9y^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 3|y| \Leftrightarrow -3y \leq x^2 \leq 3y$ az abszolútértéket feloldva. Ebből egyrészt $F: y \geq \frac{x^2}{3}$ adódik, ami az ábrán látható f parabolát és belső pontjait határozza meg. Másrészt $G: y \geq -\frac{x^2}{3}$, ami a g parabola pontjai, valamint a „felette” lévő (külső) pontok halmaza.

Eredmény: a két halmaz metszete az F ponthalmaz.

„Második megoldás”: Esetszétválasztással küszöböljük ki az abszolútértéket.

$$x^4 \leq 9y^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 3|y|$$

1. eset: Ha $y \geq 0$, akkor $x^2 \leq 3y$, azaz $y \geq \frac{x^2}{3}$, ami az F ponthalmaznak felel meg.

2. eset: Ha $y < 0$, akkor $x^2 \leq -3y$, azaz $y \leq -\frac{x^2}{3}$. Ez a g parabola pontjait, valamint az „alatta” lévő (belső) pontok halmazát határozza meg.

Az eredmény a két halmaz uniója.

14. feladat: Az ABC háromszögben $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 100^\circ$. A háromszög BC oldalához illesztettük a BCD egyenlőszárú háromszöget, így az $ABDC$ négyszöget kaptuk. A BCD háromszög egyik szöge 60° -fokkal nagyobb egy másik szögénél. Mekkora lehet az $ABDC$ négyszög B csúcsánál lévő szöge?

„Megoldás”: Először a BCD háromszög szögeit határozzuk meg.

Jelölje x az alapon fekvő szögeket (fokokban mérve).

I. eset: Ha a szárak által bezárt szög a nagyobb, akkor a háromszög szögei $x + 60^\circ$, x , x . Innen $3x + 60^\circ = 180^\circ$, $x = 40^\circ$, a háromszög szögei 40° , 40° , 100° .

II. eset: Ha a szárak által bezárt szög a kisebb, akkor a háromszög szögei $x - 60^\circ$, x , x . Innen $3x - 60^\circ = 180^\circ$, $x = 80^\circ$, a háromszög szögei 80° , 80° , 20° .

Az ABD szög a $\beta = 50^\circ$ -nál a BCD háromszög alapon fekvő, vagy szárak által bezárt szögével nagyobb. Az ABD szög tehát a négyféle értéket vehet fel: $50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$, $50^\circ + 100^\circ = 150^\circ$, $50^\circ + 80^\circ = 130^\circ$, $50^\circ + 20^\circ = 70^\circ$.

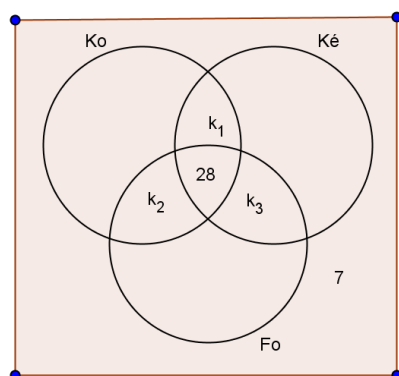
15. feladat: Próbaérettségi, 2015. március (szöveges feladat, nyelvi probléma)
Az alábbi táblázat egy iskola tíz osztályában mutatja a lányok és a fiúk létszámát.

Osztály	8.A	8.B	9.A	9.B	10.A	10.B	11.A	11.B	12.A	12.B
lány	15	8	15	13	9	18	15	10	13	11
fiú	11	17	12	13	16	9	14	17	14	17

Ezekben az osztályokban a fiúk körében felmérést készítettek, hogy ki szereti a kosárlabdát, a kézilabdát, illetve a focit, a kérdésekre mindenki válaszolt. Kiderült, hogy a megkérdezett fiúk 5%-a egyiket sem szereti, 28-an viszont mindhármat nagyon kedvelik. 103 olyan választ találtak az elemzéskor, amelyben legalább két sportot megneveztek a fiúk.

Hány fiú válaszában szerepelt pontosan egy vagy pontosan két sport a kedvencek között?

„Megoldás”: A 140 fiúból 7 nem szereti egyik sportágat sem, és mivel 28-an mindhármat kedvelik, így a pontosan egy vagy pontosan két sportot kedvelők száma $140 - 7 - 28 = 105$.



ELEMZÉSEK (8 – 15.)

8. Hibakeresés, elemzés: Az eredmény nem jó, hiányzik az ellenőrzés.

Visszahelyettesítés után $F = 8,5$ lenne, tehát elvi hibát követtünk el, amikor nem végeztük el az (egyébként kötelező) ellenőrzést.

Az ellenőrzést kétféleképpen tehetjük meg. Vagy kiszámoljuk F -et és visszahelyettesítünk a szövegbe; vagy kiszámoljuk F -et, és megállapítjuk, hogy F nemnegatív egész szám, valamint hogy a számolási lépéseink ekvivalensek voltak.

9. Hibakeresés, elemzés: A Ptolemaiosz-tételt csak akkor alkalmazhatjuk, ha már tudjuk, hogy létezik a húrnégyszög. Vagy: a tétel alkalmazása után meg kell győződünk arról, hogy a négyszög valóban létezik (ellenőrzés).

Megjegyzés: $AE = c + \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = k$ (a trapéz középvonala). Húrtrapézok esetén tehát az átlók mindig nagyobbak, mint a középvonal ($AC > AE$).

10. Hibakeresés, elemzés: A feladat valóban alulhatározott, az adatokból végtelen sok trapéz szerkeszthető. (Az ábrán B az AE egyenes E -n túli meghosszabbításán mozog, rögzített A, E, C esetén B helyzetéből adódik D .) A terület viszont – mint speciális adat – kiszámítható, mindegyik húrtrapéz területe ugyanannyi.

11. Hibakeresés, elemzés: A megoldáshoz nem volt szükségünk BD -re, a feladat ennek megadásával túlhatározott lett. Így viszont ellenőrzésként ki kell számolnunk BD értékét, és meg kell vizsgálnunk, hogy ez megegyezik-e a feladatban megadott 19 cm-rel.

Valóban két trapéz keletkezik, ha a D középpontú, 16 cm sugarú körrel elmetsszük az A csúcson át húzott, CD -vel párhuzamos egyenest. (A metszéspontok B és B_1 az ábrán.) Mivel $\angle DAB = \alpha + \gamma = 75,54^\circ$, a DAB háromszögben felírt koszinusztétellel mindkét esetben kiszámolhatjuk DB , ill. DB_1 értékét.

$$DB^2 = 15^2 + 20,46^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20,46 \cdot \cos 75,54^\circ \approx 490,34, \text{ innen } DB \approx 22,14 \text{ (cm).}$$

$$DB_1^2 = 15^2 + 7,04^2 - 2 \cdot 15 \cdot 7,04 \cdot \cos 75,54^\circ \approx 221,82, \text{ innen } DB_1 \approx 14,89 \text{ (cm).}$$

Ezek az értékek különböznek a kitűzéskor megadott 19 cm-től, így a feladatnak nincs megoldása.

12. Hibakeresés, elemzés: Az előző feladatban megadott $BD = 19$ cm-t most $BD = 14,9$ cm-re módosítottuk. Érdekes kérdés, hogy az átlóra az előző megoldásban kapott „hivatalos” $DB_1 \approx 14,89$ cm közelítő 14,9 cm-es értéke elfogadható-e.

13. Hibakeresés, elemzés: Az első (hibás) megoldásban nem jó az abszolútérték kiküszöbölése. Helyesen $x^2 \leq 3|y| \Leftrightarrow x^2 \leq 3y$ vagy $3y \leq -x^2$. Ez utóbbiból $y \leq -\frac{x^2}{3}$ adódik, az eredmény a két parabolatartomány uniója.

14. Hibakeresés, elemzés: Hiányzik az ellenőrzés. Az $ABDC$ négyszög C csúcsánál lévő szögei az egyes esetekben:

Ha $\angle ABD = \beta + 40^\circ$, akkor $\angle ACD = 100^\circ + 40^\circ = 140^\circ$ vagy $100^\circ + 100^\circ = 200^\circ$;

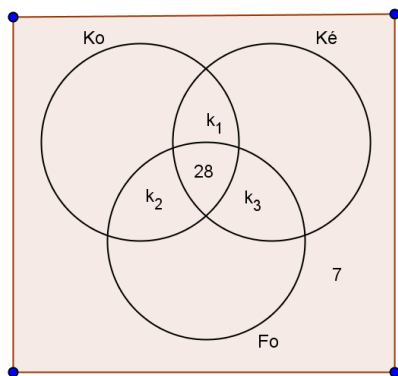
ha $\angle ABD = \beta + 100^\circ$, akkor $\angle ACD = 100^\circ + 40^\circ = 140^\circ$;

ha $\angle ABD = \beta + 80^\circ$, akkor $\angle ACD = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$ vagy $100^\circ + 20^\circ = 120^\circ$;

ha $\angle ABD = \beta + 20^\circ$, akkor $\angle ACD = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$.

Az $\angle ACD = 180^\circ$ esetekben (tehát amikor a C csúcs mellé a 80° -os szög kerül) nem jön létre az $ABDC$ négyszög, így ekkor nem kapunk megoldást.

15. Hibakeresés, elemzés: $103 = k_1 + k_2 + k_3 + 28$, így a pontosan két sportot kedvelők száma $k_1 + k_2 + k_3 = 75$. A pontosan egy sportágat kedvelők száma $105 - 75 = 30$.



Megjegyzés: Nyelvi félreértésről van szó. A feladat kérdése ez volt: „hányan kedvelnek pontosan egy”, VAGY (illetve) „hányan kedvelnek pontosan két” sportágat. A hiányos válasz pedig ez: „hányan kedvelnek pontosan egy VAGY pontosan két” sportágat.