

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK (16 – 21.)

16. feladat: (2026. tavaszi érettségi vizsga, Ksz, 17.) A 2000-es években Magyarországon csökkent a nagypályás, felnőtt korosztályú férfi futballcsapatok száma. A falusi futball megerősítéséért indult 2022-ben egy civil kezdeményezés. A táblázat a nagypályás országos bajnokságokban szereplő felnőtt korosztályú férfi futballcsapatok számát mutatja 2000 és 2025 között (év végi adatok).

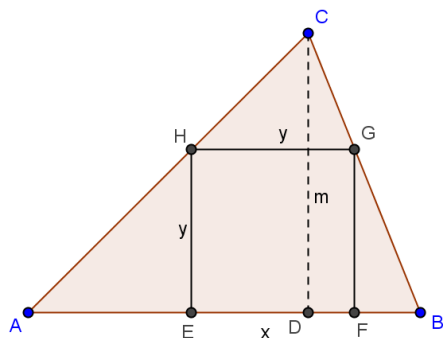
Év	Csapatok száma
2000	2272
2005	2135
2010	2009
2015	1960
2020	1774
2025	1554

b) A 2000-es adathoz viszonyítva hány százalékkal csökkent a csapatok száma 2025-re?

„Megoldás”: A 2000-es adat 2272. Mivel $\frac{2025}{2272} \approx 0,8913$, kb. 10,9%-kal csökkent a csapatok száma 2025-re.

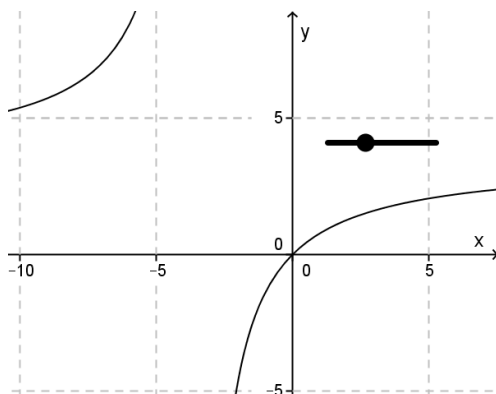
17. feladat: Az ABC hegyesszögű háromszögben $a < b < c$. A háromszög oldalaira befelé egy-egy négyzetet állítunk úgy, hogy a négyzet két csúcsa az oldalon, a harmadik és negyedik csúcsa pedig a másik két oldalon van. Melyik négyzet területe lesz a legnagyobb a három közül?

„Megoldás”: Tegyük fel, hogy a háromszög x oldalára megfelelően állított négyzet oldala y , az oldalhoz tartozó magasság pedig m . Ekkor az ABC háromszög területét az $ABGH$ trapéz és a HGC háromszög területének összege adja meg: $\frac{xm}{2} = \frac{(x+y)y}{2} + \frac{y(m-y)}{2}$.



Az egyenletből $y = \frac{mx}{m+x}$.

Az $y = \frac{mx}{m+x}$ függvény képe a koordinátarendszerben egy olyan hiperbola, amely átmegy az origón, és amit az x tengely mentén eltolunk $(-m)$ -mel.



A grafikon alapján látható, hogy az x oldal növelésével az oldalra állított négyzet y oldala is nő.

Eredmény: Adott háromszög esetén a legnagyobb oldalra állított négyzet területe lesz a legnagyobb.

18. feladat: a) Bizonyítsuk be, hogy 6 irracionális szám közül mindig kiválasztható három olyan, amelyek közül bármely kettő összege irracionális.

b) Igaz-e az állítás 5 irracionális számra?

„Megoldás”:

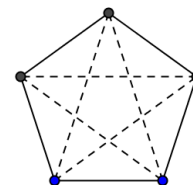
a) Gráfelméleti szemléltetés: egy 6 pontú teljes gráf éleit két színnel kiszínezzük. A gráf pontjai felelnek meg az adott számoknak, és két számot (azaz a nekik megfelelő pontokat) akkor kötünk össze pl. piros ill. kék éllel, ha összegük irracionális, ill. racionális.

Ekkor igazolandó, hogy a gráfban van piros háromszög.

Tudjuk, hogy Ramsey tétele miatt a gráfban van piros vagy kék háromszög. De kék háromszög nem lehet: ha $a + b$, $b + c$, $a + c$ racionális, akkor összegükből $2(a + b + c) \Rightarrow (a + b + c)$ is racionális, ahonnan pl. $(a + b + c) - (a + b) = c$ is racionális lenne, ami ellentmondás.

A gráfban tehát van piros háromszög.

b) A bizonyítás „nem működik” akkor, ha az 5 pontú teljes gráf mindegyik pontjából 2 piros és 2 kék él indul ki (ábra). Ebben a gráfban nincs piros (sem kék) háromszög, az állítás tehát 5 irracionális számra nem igaz.



19. feladat (Héttusa 15. (Róka Sándor)) Az a , b , c egész számokra az $a \cdot b$ és $b \cdot c$ számok négyzetszámok. Igaz-e, hogy ekkor $a \cdot c$ is egy egész szám négyzete?

„Megoldások”:

Első megoldás: Az állítás igaz.

Legyen p tetszőleges (pozitív) prímszám, melynek kitevője az a , b , c egész számokban rendre α , β , γ . Mivel $a \cdot b$ négyzetszám, (1) $(\alpha + \beta)$ páros, és $b \cdot c$ négyzetszám, így (2) $(\beta + \gamma)$ is páros.

Az $a \cdot c$ szorzatban p kitevője $(\alpha + \gamma)$, vagyis igazolandó, hogy $(\alpha + \gamma)$ páros. (Ha a szorzatban tetszőleges prímtenyező páros kitevőn van, abból már következik az állítás.)

(1) és (2) különbségéből $(\alpha + \beta) - (\beta + \gamma) = (\alpha - \gamma)$ páros, és így $(\alpha + \gamma) = (\alpha - \gamma) + 2\gamma$ szintén páros szám. Ezzel az állítást beláttuk.

Második megoldás: Az állítás igaz.

Legyen $a \cdot b = n^2$ és $b \cdot c = m^2$, ekkor $a \cdot c = \frac{n^2}{b} \cdot \frac{m^2}{b} = \left(\frac{n \cdot m}{b}\right)^2$. A feltételek miatt b osztója n^2 -nek és m^2 -nek, így b^2 osztója $n^2 \cdot m^2$ -nek, azaz b osztója $n \cdot m$ -nek. Tehát $\frac{n \cdot m}{b}$ egész szám, így az állítást igazoltuk.

20. feladat: Milyen n természetes szám esetén osztható 2024-gyel az $508^n - 2^n$ kifejezés?

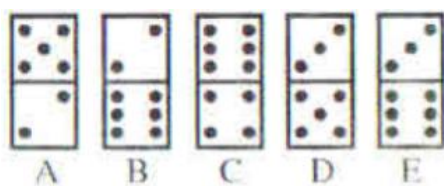
„Megoldás”: $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$.

8-cal osztva 508 maradéka 4, így a kifejezés $n = 3, 4, 5, \dots$ esetén osztható 8-cal.

Mivel $a - b$ osztója $(a^n - b^n)$ -nek, így $508^n - 2^n$ osztható $508 - 2 = 506$ -tal. $506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$, így az $n = 3, 4, 5, \dots$ kitevők esetén $508^n - 2^n$ osztható 11-gyel és 23-mal is, vagyis osztható $8 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$ -gyel.

Eredmény: $n = 3, 4, 5, \dots$

21. feladat (Zrínyi, 2016. megyei forduló, 5. osztály): Melyik dominót kell megfordítani ahhoz, hogy a dominók felső részein lévő pöttyök számának összege egyenlő legyen a dominók alsó részein lévő pöttyök számának összegével?



Megoldás:

A dominók felső részein lévő pöttyök számának összege 19, az alsó részein lévő pöttyök számának összege 23, a különbség 4.

Első megoldás: A megfordítás (azaz a hátlap és előlap megcserélése) során olyan dominót kell megfordítanunk, amelyben az alsó szám 4-gyel nagyobb, mint a felső. Eredmény: B.

Második megoldás: A megfordítás (azaz a síkbeli 180° -os elforgatás) során olyan dominót kell megfordítanunk, amelyben az alsó szám 2-vel nagyobb, mint a felső. Eredmény: D.

Melyik megoldás a helyes?

ELEMZÉSEK (16 – 21.)

16. Elemzés: Szövegértelmezési problémáról van szó. A feladat kitűzője szerint a 2025-ös évre (vagyis annak 1554 adatára) vonatkozik a csökkenés, míg a megoldó szerint a 2025 darab csapatszámra.

17. Hibakeresés, elemzés: Legyen a három oldal például $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Ennek a Heron-háromszögnek a területe 84 egység; a három oldalhoz tartozó magasság $m_a = \frac{168}{13} \approx 12,92$; $m_b = \frac{168}{14} = 12$; $m_c = \frac{168}{15} = 11,2$; a megfelelő négyzetoldalak pedig rendre $y_a = \frac{168}{25,92} \approx 6,48$; $y_b = \frac{168}{26} = 6,46$; $y_c = \frac{168}{26,2} \approx 6,41$.

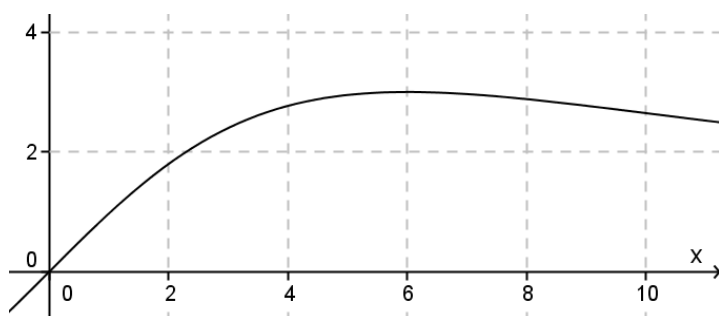
Vagyis éppen fordított eredményt kaptunk: ebben a háromszögben a kisebb oldalakhoz tartozik a nagyobb beírt négyzet.

Másik megközelítés: Az $y = \frac{mx}{m+x} = \frac{2t}{m+x}$ alakból az következik, hogy adott területű háromszögek esetén akkor maximális a négyzetoldal, ha $(m+x)$ a lehető legkisebb. Mivel a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt $\frac{m+x}{2} \geq \sqrt{mx} \Leftrightarrow m+x \geq 2\sqrt{2t}$, az $(m+x)$ összeg akkor minimális, ha $m = x$. (Illetve $(m+x)$ annál kisebb, minél kisebb m és x eltérése.)

Másképpen: $y = \frac{mx}{m+x} = \frac{2t}{\frac{2t}{x} + x}$, ahol t a háromszög területe. Adott terület esetén a

számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt y maximális $\Leftrightarrow \frac{2t}{x} + x$ minimális

$\Leftrightarrow \frac{2t}{x} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2t}$, azaz $x = m$. (Az ábrán $t = 18$, a maximumhely $x = 6$.)



Ha viszont adott t terület esetén az $x = \sqrt{2t}$ választással élünk, akkor a háromszög tetszőleges b oldalára $t = \frac{xb \sin \varphi}{2} \Leftrightarrow 2t = \sqrt{2t} b \sin \varphi \Leftrightarrow \sqrt{2t} = b \sin \varphi \Leftrightarrow x = b \sin \varphi$, azaz $x < b$ szükségképpen (φ hegyesszög).

Átfogalmazás: Ha pl. $a < b$, ebből – hegyesszögű háromszögekben – következik-e, hogy $|a - m_a| < |b - m_b|$? (És ekkor a beírt négyzet oldalára $y_a > y_b$.)

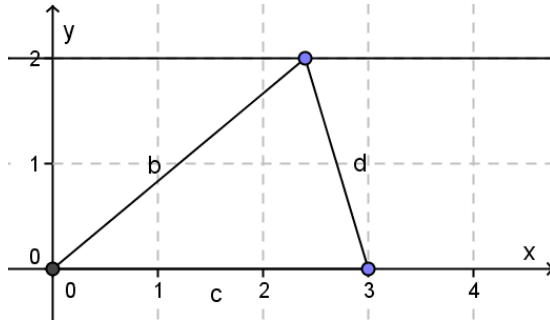
A következményt ekvivalens átalakításokkal átfogalmazzuk:

$$|a - m_a| < |b - m_b| \Leftrightarrow (a - m_a)^2 < (b - m_b)^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + m_a^2 - 2am_a < b^2 + m_b^2 - 2bm_b \Leftrightarrow a^2 + \frac{4t^2}{a^2} < b^2 + \frac{4t^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{4t^2}{a^2} - \frac{4t^2}{b^2} < b^2 - a^2 \Leftrightarrow$$

$$4t^2 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} < b^2 - a^2 \Leftrightarrow (\text{kihasználjuk az } a < b \text{ feltételt:}) \quad t^2 < \frac{a^2 b^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2 b^2 \sin^2 \varphi}{4} < \frac{a^2 b^2}{4}, \text{ s ez hegyesszögű háromszögben mindig teljesül.}$$



18. Hibakeresés, elemzés:

b) Ha $a + b, b + c, \dots, a + e$ racionális, akkor összegükből $2(a + b + c + d + e) \Rightarrow (a + b + c + d + e)$ is racionális, ahonnan pl. $(a + b + c + d + e) - (a + b) - (c + d) = e$ is racionális lenne, ami ellentmondás.

Ha nem létezik a fenti színezésű gráf, akkor valamelyik pontjából indul ki három azonos színű él; ekkor pedig már keletkezik egyszínű háromszög. Mivel ez kék nem lehet, így keletkeznie kell piros háromszögnek.

Az állítás tehát 5 irracionális számra is igaz.

Megjegyzés: Az állítás 4 irracionális számra már nem igaz, pl. $(\pi; -\pi; 2\pi; -2\pi)$.

19. Elemzés: A válasz: Az állítás hamis.

Egy példa erre: $a = 1, b = 0, c = 2$. Ekkor $a \cdot b = 0$ és $b \cdot c = 0$ (és a 0 négyzetszám!), de $a \cdot c = 2$.

A hiba oka: a második megoldásban osztottunk b -vel, itt a $b = 0$ esetet külön meg kellett volna vizsgálni. (A $b = 0$ speciális esetet, egyéb b egész számokra teljesül az állítás.)

20. Elemzés: Az oszthatóság $n = 0$ -ra is teljesül (kivételes eset).

21. Elemzés: Nem egyértelmű a feladat szövegezése (félreérthetőség).